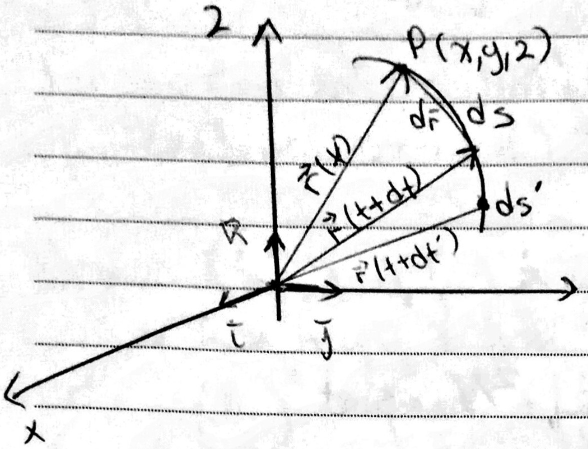
25/02/2018

# Μάθημα 2ο

Υ.Σ: Δεν έχει διαστάσεις, είναι εφοδιασμένο με τη μάζα μόνο




$\vec r = x\bar i + y\bar j + z\bar k$, Διάνυσμα θέσης

$S(x,y,z)$: $\bar r(t) = x(t)\bar i + y(t)\bar j + z(t)\bar k$

Κινούμαστε πάνω σε μια καμπύλη και όχι άτακτα στο χώρο, κινούμαστε σε ένα "δρόμο" άρα μπορώ να εκφράσω το Δ.Θ. με μια μόνο παράμετρο $t$.

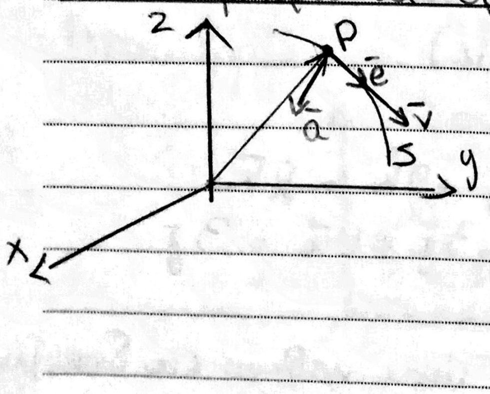
Σε $\mathbb{R}^3$ μια καμπύλη: Θέλω να δω πόσο γρήγορα κινείται το Υ.Σ. δηλ., την ταχύτητά του.

Ταχύτητα: $\bar v = \dfrac{d\bar r}{dt} = \dot x\bar i + \dot y\bar j + \dot z\bar k$

Επιτάχυνση: $\bar a = \dfrac{d\bar v}{dt} = \dfrac{d^2\bar r}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\bar i + \dfrac{d^2y}{dt^2}\bar j + \dfrac{d^2z}{dt^2}\bar k \Rightarrow$

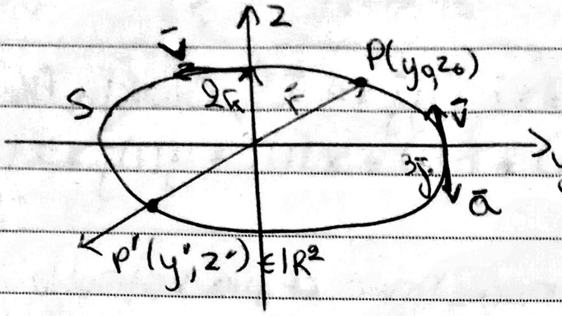
$$\bar a = \ddot x\bar i + \ddot y\bar j + \ddot z\bar k$$

⇒ Πως μπορώ να βρω το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα;




$\bar e = \dfrac{\bar v}{|\bar v|}$, άρα $\bar v = |\bar v|\bar e$

**Παράδειγμα:** Έχω ένα Υ.Σ. που κινείται πάνω σε μια καμπύλη
$\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1 \longrightarrow$ είναι μια ελλειπτική τροχιά
Το δθ. είναι: $\bar{r} = y\bar{j} + z\bar{k}$, όπου $(y,z) \in S$




Κάνω παραμετρικοποίηση: $y/3 = \cos t$, $z/2 = \sin t$
Αντικαθιστώ στην αρχική και έχω:
$\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (1)

Αυτό σημαίνει ότι μπορώ να κάνω αυτή την παραμετρικοποίηση διότι ισχύει η σχέση (1).
Οπότε το δ.θ. είναι: $\bar{r}(t) = 3\cos t\,\bar{j} + 2\sin t\,\bar{k}$
$\bar{v}(t) = -3\sin t\,\bar{j} + 2\cos t\,\bar{k}$
$\bar{a}(t) = -3\cos t\,\bar{j} - 2\sin t\,\bar{k} = -(3\cos t\,\bar{j} + 2\sin t\,\bar{k})$
$|\bar{v}|^2 = 9\sin^2 t + 4\cos^2 t = 5\sin^2 t + 4$
$|\bar{a}|^2 = \dots = 5\cos^2 t + 4$

Η ταχύτητά μας γίνεται μέγιστη όταν $\sin t = 1$ άρα $t = \pi/2$
οπότε $|\bar{v}|^2 = 5 + 4 \Rightarrow |\bar{v}| = 3$ (μέγιστη ταχ.)
Η επιτάχυνση γίνεται μέγιστη όταν $\cos t = 1$ όταν $t = 0$
οπότε $|\bar{a}|^2 = 5 + 4 \Rightarrow |\bar{a}| = 3$ (μεγ. επιτ.)

Δ.Θ. για $\pi/2$ με τη μέγιστη ταχύτητα: $\bar{r} = 0\bar{j} + 2\bar{k} = 2\bar{k}$
Δ.Θ. για $t=0$ όταν έχω μέγιστη επιτάχυνση: $\bar{r} = 3\bar{j} + 0\bar{k} = 3\bar{j}$

**Παράδειγμα:** ΝΔΟ. αν το διάνυσμα ταχύτητας $\bar{v}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα επιτάχυνσης $\bar{a}$ $\forall t$, τότε το ΥΣ κινείται με σταθερή ταχύτητα

Λύση

$$\begin{cases} \bar v = \dot x \bar i + \dot y \bar j + \dot z \bar k = \dfrac{d\bar r}{dt} \\ \bar a = \ddot x \bar i + \ddot y \bar j + \ddot z \bar k = \dfrac{d^2 \bar r}{dt^2} \end{cases}$$

Για να είναι κάθετα μεταξύ τους θα πρέπει : $\bar v \cdot \bar a = 0$
(Βαθμωτή ποσότητα)

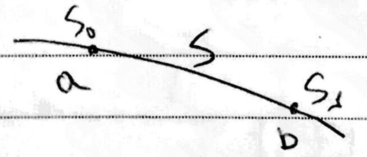
<u>Άρα</u>: $(\dot x \bar i + \dot y \bar j + \dot z \bar k) \cdot (\ddot x \bar i + \ddot y \bar j + \ddot z \bar k) = 0 \Rightarrow$
$= \dot x \ddot x + \dot y \ddot y + \dot z \ddot z = 0 \Rightarrow$ ολοκλήρωμα:
$\left(\frac{\dot x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot z}{2}\right)^2 = c_1 \Rightarrow (\dot x)^2 + (\dot y)^2 + (\dot z)^2 = c_2$
όπου $c_2 = 2c_1$

<u>Όμως</u>: $|\bar v| = \sqrt{(\dot x)^2 + (\dot y)^2 + (\dot z)^2} = \sqrt{c_2} = c, \ \forall t$
Οπότε η ταχύτητα παραμένει σταθερή.

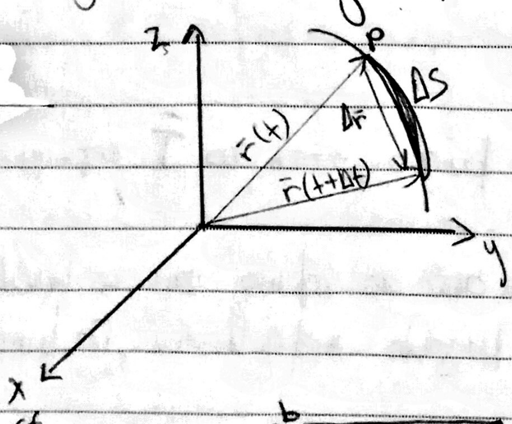
## <u>Μήκος Διαδρομής</u>

Το μήκος διαδρομής μιας λείας καμπύλης $S$ με διάνυσμα θέσης $\bar r(t) = x(t)\bar i + y(t)\bar j + z(t)\bar k$ μεταξύ των σημείων a και b δίνεται από τη σχέση:

$$S = \int_a^b \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\, dt = \int_a^b |\bar v|\, dt = \int_a^b |\bar v(t)|\, dt$$




<u>Απόδειξη</u> Ξεκινάμε από το δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα.



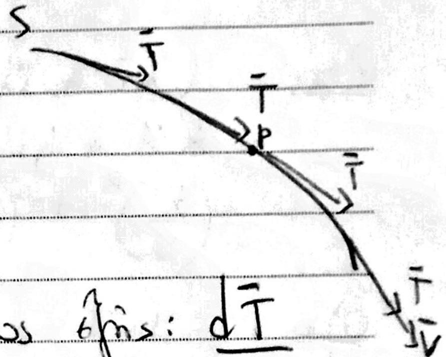

$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \Rightarrow$
$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \Rightarrow$
$\frac{\Delta s}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{dt}\right)^2}$
$\approx |\bar v|$ βαθμωτή

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{dt}\, dt_1 = \int_a^b \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\, dt \Rightarrow s(t) - \cancel{s(t_0)}^{\,0} = \int_a^b \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = \int_a^b |\bar{v}(t)|\, dt$$

<u>Παρατήρηση</u>: Με βάση το προηγούμενο μπορούμε να γράψουμε το ΔΘ. παραμετρικά ως συνάρτηση του $s$, $\bar{r} = \bar{r}(s)$

<u>Μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα (ΜΕΔ)</u>




Έστω δ.Θ. $\bar{r} = \bar{r}(t)$

$$\bar{T} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$$ ΜΕΔ στη τροχιά

Η μεταβολή του ως προς τον χρόνο ορίζεται ως εξής: $\frac{d\bar{T}}{d}$

$$\bar{T} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{d\bar{r}/dt}{ds/dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}$$

Εάν πάρω πολύ μικρές διαφορές $d\bar{r}, ds$, τότε αυτά θα είναι ίσα

<u>Καμπυλότητα</u>

$$\kappa = \frac{1}{|\bar{v}|} \left| \frac{d\bar{T}}{dt} \right|$$ βαθμωτό

$$\kappa = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \left| \frac{d\bar{T}}{dt} \right| = \left| \frac{d\bar{T}/dt}{ds/dt} \right| = \left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right|$$

1) Αν το $\left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right|$ είναι μεγάλο σε μέτρο, τότε το $\bar{T}$ στρέφεται απότομα καθώς το Υ.Σ. διέρχεται από το σημείο της καμπύλης άρα θα έχω μεγάλη καμπυλότητα (1: μεγάλη καμπυλότητα, 0: μικρή καμπυλότητα (ευθεία))

2) Αν το $\left|\frac{d\bar{T}}{ds}\right|$ είναι μικρό σε μέτρο, τότε το $\bar{T}$ στρέφεται βραδύτερα, άρα μικρή καμπυλότητα

Παράδειγμα

1) Η καμπυλότητα ευθείας είναι 0.


αποδ: $\bar{T} = \bar{c} \Rightarrow \frac{d\bar{T}}{ds} = \bar{0} \Rightarrow \left|\frac{d\bar{T}}{ds}\right| = |\bar{0}| = 0$

2) Η καμπυλότητα κύκλου ακτίνας α έχει $\kappa = \frac{1}{a}$

αποδ: Έστω κύκλος ακτίνας $a$ : $\bar{r}(t) = (a\cos t)\bar{i} + (a\sin t)\bar{j}$

$\dot{\bar{r}}(t) = \bar{v}(t) = -a\sin t\,\bar{i} + a\cos t\,\bar{j} \Rightarrow |\bar{v}| = |a| = a, \; a>0$

$\bar{T} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = -\sin t\,\bar{i} + \cos t\,\bar{j}$

$\frac{d\bar{T}}{dt} = -a\cos t\,\bar{i} - \sin t\,\bar{j} \Rightarrow \left|\frac{d\bar{T}}{dt}\right| = 1$

οπότε $\kappa = \frac{1}{|\bar{v}|} \cdot \left|\frac{d\bar{T}}{dt}\right| = \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a}$ αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας

μεγάλο κ σημαίνει η τροχιά πολύ καμπυλωμένη.